

國立台南第二高級中學 104 學年度第二學期 高二自然組期末考數學試題

注意：(1) 請將答案依題目中底線上的編號，填入答案紙上相對應的格子內

(2) 答案請務必有理化，未化簡者不予計分

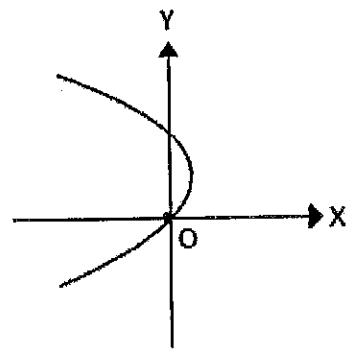
一、多選題：(每題 6 分，共 18 分；錯一個選項得 4 分、錯兩個得 2 分、錯三個以上或未作答得 0 分)

1. 已知橢圓 Γ 的長軸平行 x 軸，中心為 $(-3, 4)$ 且通過點 $(0, 8)$ ，試問下列哪些點一定會在 Γ 上？

- (A) $(-6, 8)$ (B) $(2, 4)$ (C) $(-6, 0)$ (D) $(-4, 8)$ (E) $(0, 0)$

2. 設拋物線 $x = ay^2 + by + c$ 圖形如右，則下列選項中，何者為正數？

- (A) a (B) b (C) c (D) $b^2 - 4ac$ (E) $a - b + c$



3. 下列敘述何者正確？

(A) $\sqrt{x^2 + y^2} = |x - 3|$ 的圖形為一拋物線

(B) $y = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ 的圖形為一橢圓

(C) $\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2} = 6$ 的圖形為一橢圓

(D) $\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} - \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} = 4$ 的圖形為一雙曲線

(E) 雙曲線的其中一個分支，可視為一拋物線

二、填充題：(配分依答案卷上之表格)

(I) 第一部分(共七題)

1. 試求焦點為 $(2, 0)$ ，準線為 $x = -2$ 的拋物線方程式 (1)

2. 已知拋物線 Γ 的對稱軸平行 x 軸，且過 $(3, 0)$ 、 $(1, 1)$ 、 $(-7, -1)$ 三點，試求 Γ 的方程式 (2)

3. 試求短軸兩頂點 $A(1, 3)$ 、 $B(5, 3)$ ，兩焦點距離為 6 的橢圓方程式 (3)

4. 已知方程式 $\frac{2(x-1)^2}{3} + \frac{5(2y-4)^2}{6} = 5$ 之圖形為橢圓，試求其焦點 (4) (兩焦點全對才給分)

5. 試求兩焦點為 $(-3, 2)$ 、 $(5, 2)$ ，實軸長為 4 的雙曲線方程式 (5)

6. 試求中心為 $(1, 0)$ ，兩焦點距離為 4 的等軸雙曲線 (6) (有兩解，全對才給分)

(II) 第二部分(共七題)

1. 求與圓 $C: (x+3)^2 + y^2 = 4$ 外切，且與直線 $L: x-1=0$ 相切之所有圓的圓心 P 的軌跡方程式為
 (7)

2. 已知橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$ ，將圖形以原點為中心伸縮 $\frac{1}{3}$ 倍，再沿著 x 軸方向右移 5 單位，沿著 y 軸方向上移 3 單位，得到新橢圓 Γ' ，試求新橢圓 Γ' 的方程式 (8)

3. 拋物線的光學性質為：『平行對稱軸的光線碰到拋物線上一點 P ，反射線會通過焦點 F 』
坐標平面上拋物線 $y^2 = 12x$ ，其焦點為 F ，對稱軸 L ；有一道雷射光自點 $A(7, 5)$ 出發，以平行 L 的方向射向拋物線，並反射到焦點 F ，求雷射光由點 A 到焦點 F 所行經的距離為 (9)

4. 已知橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{18} = 1$ 之兩焦點為 F_1, F_2 ， P 點為橢圓 Γ 上一點，求 $\triangle PF_1F_2$ 面積的最大值
為 (10)

5. 試求過點 $P(4, 3)$ 且與雙曲線 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 有共同漸近線的雙曲線方程式 (11)

6. 已知橢圓 $\frac{x^2}{k^2+1} + \frac{y^2}{2-k} = 1$ 與雙曲線 $\frac{x^2}{35} - \frac{y^2}{20} = 1$ 有共同的焦點，求實數 k 的值 (12)

7. 橢圓 Γ 的中心為原點 $(0,0)$ ，長軸平行於 x 軸；已知橢圓內接正方形面積為 $\frac{64}{5}$ ，且長軸長為短軸長的 2 倍，試求橢圓 Γ 的方程式 (13)

(III) 第三部分：題組 (共三題)

鮑春，是一個就讀於台南二中的平凡男孩。
他的人生就是不斷的滑手機，躺著滑、坐著滑，趴著滑～
卻不料，那天下午五點的「摘星」，為他的高中生涯摘出了新篇章！

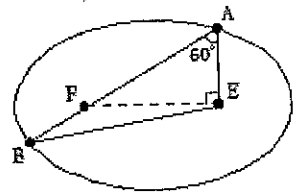
從送出「妳喜歡上數學課嗎？」的問題開始，同樣熱愛數學的鮑春與心玫一拍即合；一個月後他們決定見面，鮑春安排的第一個行程是——他最愛的、熱血沸騰的摔角比賽！

在現場比賽的熱烈氣氛中，摔角選手 John Cena 把他的對手 Sheamus 抓起來舉過頭，從距離地面高 2 公尺處，以拋物線的弧度扔了出去，從旁邊觀戰的鮑春，清楚的看到當 Sheamus 飛到最高點時，距離地面 2.5 公尺，同時和 John Cena 站的位置水平距離為 1 公尺。

在這短暫的一瞬間，鮑春憑藉著精準的眼力和高超的數學心算能力，轉頭告訴心玫：
「Sheamus 落到地面上的位置，和原本 John Cena 站的位置距離 (14) 公尺！」

當結果驗證時，心玫看向鮑春的眼中流露出了驚訝和崇拜；鮑春覺得自己超帥，但鮑春不說。接著，打著展現溜冰英姿、說不定還有機會牽牽小手的如意算盤，鮑春帶心玫去了溜冰場

室內溜冰場的形狀從上空俯瞰恰巧是一橢圓，且長軸長為 120 公尺，短軸長為 $40\sqrt{6}$ 公尺，場地中在橢圓的兩焦點處分別做了記號 E 和 F。心玫在焦點 E 處站定，鮑春從她身邊出發，以垂直 \overline{EF} 的方向朝邊緣溜去，碰到場地邊緣標示物 A 後，馬上轉向以 $\angle EAF = 60^\circ$ 的方向直線通過 F 點，再碰到場地邊緣的另一標示物 B 後，轉頭溜回心玫所在的 E 點，路徑如右圖。



滑回心玫身邊，鮑春眼神在冰上的痕跡掃視而過，信心滿滿的告訴心玫：

「我不需要跑步 APP 之類的軟體，就可以知道剛剛從 A 點到 B 點我總共滑了 (15) 公尺！」

見面結束後，鮑春和心玫保持著聯絡，但距離卻始終若即若離；鮑春覺得以自己數學小王子的完美形象，在心玫心中一定無法比 87 分再高了！因此，他決定約心玫到市立圖書館一起準備期末考，並藉機表白自己的心意。在市圖衝刺期末考當晚，鮑春心神不寧的偷覷著對面埋頭認真讀書的心玫，強作鎮定的遞了張告白紙條過去。心玫看完，卻忽然顧左右而言他，問道：「鮑春，可以請教你一題數學嗎？」

鮑春暫且按下了心中的疑問，把握展現數學能力的機會，接過心玫遞過來的題目：

「雙曲線的方程式為 $\Gamma: 9x^2 - 4y^2 - 36x + 16y - 16 = 0$ ，試求其漸近線方程式 (16) (兩條)」

解完，鮑春原以為會再次得到崇拜的眼神，告白成功；不料，抬頭卻見心玫對他歉然一笑：
「鮑春，你是個好人！可是鮑春，你知道嗎？我們之間，就如同雙曲線和它的漸近線，天涯海角，即使距離再近，也不會有相交的那一天……」

鮑春愣愣的看著數學講義上的雙曲線與漸近線
他不懂頰畔漫延的水痕是什麼，卻忽然明白了這曲線的別名叫做痛。

鮑春和心玫的愛情故事就到這裡，而你們每一個人的數學旅程，還在繼續...

國立台南第二高級中學 105 學年度第二學期 高二自然組期末考數學答案卷

注意：(1) 請將答案依題目中底線上的編號，填入答案紙上相對應的格子內

(2) 答案請務必有理化，未化簡者不予計分

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

得
分

一、多選題：(每題 6 分，共 18 分；錯一個選項得 4 分、錯兩個得 2 分、錯三個以上或空白得 0 分)

1.	2.	3.
ACE	BD	AC

二、填充題：(配分依表格，每格答案全對才給分)

題數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
得分	7	14	21	27	33	39	44	49	54	59	64	68	72	76	79	82

(1)	(2)	(3)	(4)
$y^2 = 8x$	$x = -6y^2 + 4y + 3$	$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{13} = 1$	$(1 \pm \sqrt{6}, 2)$
(5)	(6)	(7)	(8)
$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{12} = 1$	$\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{y^2}{2} = \pm 1$	$y^2 = -12x$	$\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$
(9)	(10)	(11)	(12)
10	6	$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{27} = 1$	-8
(13)	(14)	(15)	(16)
$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$	$1 + \sqrt{5}$	$\frac{320}{3}$	$3x - 2y - 2 = 0$ 或 $3x + 2y - 10 = 0$

~寫的時候多一點信心，計算的時候多一點細心

暑期數學營人數不足停辦的目標需要我們一起努力 (‘-)σ，加油! :) ~