

國立台南二中 104 學年度第 2 學期第一次期中考 高三自然組數學科試題

一、多選題：每題 5 分，共 15 分（錯 1 個選項給 2 分，錯 2 個或 2 個以上不給分）

1. 下列各無窮數列中，哪些選項為收斂數列？

(1) $\left\langle \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \right\rangle$ (2) $\left\langle \left(2 + \frac{1}{5^n}\right) \left(3 - \frac{1}{n}\right) \right\rangle$ (3) $\left\langle \tan^n \frac{5\pi}{12} \right\rangle$ (4) $\left\langle \frac{(-1)^n}{n} \right\rangle$ (5) $\left\langle \log \frac{n}{n+1} \right\rangle$

2. 請選出與函數 $f(x) = x$ 圖形相同的選項？

(1) $f_1(x) = \sqrt{x^2}$ (2) $f_2(x) = (\sqrt{x})^2$ (3) $f_3(x) = \log_2 2^x$ (4) $f_4(x) = 2^{\log_2 x}$ (5) $f_5(x) = \frac{x^2}{x}$

3. 已知函數 $f(x)$ 的導函數 $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$ ，選出正確的選項？

(1) 以點 $(4, f(4))$ 為切點的切線斜率為 12 (2) $f(x)$ 在區間 $[1, 2]$ 上為遞增函數 (3) $f(x)$ 在 $x = 2$ 處有極小值 (4) $f(x)$ 在 $x = 1$ 處有極大值 (5) $(3, f(3))$ 是 $f(x)$ 圖形的反曲點

二、填充題：共 70 分

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 已知函數 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5, & x \leq 2 \\ ax - 1, & x > 2 \end{cases}$ 在 $x = 2$ 處連續，則實數 a 的值為 $\underline{\hspace{2cm}}$

3. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{3a_n - 1}{4a_n - 1} \end{cases}$ ， $n \in N$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{2cm}}$

4. 設函數 $f(x) = \left[x - \frac{1}{2} \right] + \left[x + \frac{1}{3} \right]$ ，其中符號 $[\]$ 為高斯符號，若 $f_2(x) = f(f(x))$ ，且對正整數 $n \geq 2$ ， $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$ ，則 $f_{100} \left(\frac{7}{6} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$

5. 設三次多項函數 $f(x) = (x-1)(x-3)(x-5) + (x-2)(x-4)(x-6)$ ，若 $f(x) = 0$ 在 k 與 $k+1$ 之間有實根，其中 $k \in N$ ，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ （不只一解）

6. 試求下列各題之導數：

(1) 已知多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1) = -2$ ， $f'(1) = 3$ ， $g(x) = (2x^2 - x + 1) \times f(x) + (3x - 2)^4$ ，則 $g'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) 設 $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$ ，則 $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$

7. 設 $f(x)$ 為三次多項式函數，且 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 1$ ， $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x+2} = 2$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x-3} = \underline{\hspace{2cm}}$

8. 設 $f(x)$ 為實係數多項函數，若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$ ，則 $f(x)$ 函數圖形在 $x=0$ 時的切線方程式為 _____

9. 已知多項式 $f(x)$ 滿足 $f''(x) = 8x + 11$ ，且 $y = f(x)$ 在 $x=1$ 有局部極值，則 $f'(0) =$ _____

10. 矩形 $A_1B_1C_1D_1$ 中， $\overline{A_1B_1} = 4$ ， $\overline{B_1C_1} = 3$ ，取四邊中點連成一菱形 $P_1Q_1R_1S_1$ ，再取菱形的四邊中點連成另一矩形 $A_2B_2C_2D_2$ ，再取矩形的四邊中點連成另一菱形 $P_2Q_2R_2S_2$ ，如此繼續下去，得到一序列的菱形 $P_1Q_1R_1S_1$ ， $P_2Q_2R_2S_2$ ， $P_3Q_3R_3S_3$ ，...，求這些菱形 $P_1Q_1R_1S_1$ ， $P_2Q_2R_2S_2$ ， $P_3Q_3R_3S_3$ ，... 的面積和為 _____

11. 設函數 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 3 & -1 \\ x^2 & 9 & 1 \end{vmatrix}$ 的定義域為 $\{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 3\}$ ，則 $f(x)$ 的值域為 _____

12. 設 $f(x)$ 為三次實係數多項式函數，其圖形通過 $(1, 3)$ ， $(-1, 5)$ 兩點。若 $f(x)$ 的圖形在點 $(1, 3)$ 的切線斜率為 7，而在點 $(-1, 5)$ 的切線斜率為 -5，試求 $f(x) =$ _____

三、計算與證明題：共 15 分

1. (1) 試證：對所有的正整數 n ，不等式 $2^n \geq n$ 恆成立（6 分）

(2) 利用(1)，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = ?$ （4 分）

2. 已知 $f(x) = (x - 49)^2(x - 51)^2 + 2x$ ，求證：至少有一實數 c ，使得 $f(c) = 100$ （5 分）

國立台南二中 104 學年度第 2 學期第一次期中考 高三自然組數學科答案卷

班級：三年級_____班 座號：_____ 姓名：_____

一、選擇題：每題 5 分，共 15 分（錯 1 個選項給 2 分，錯 2 個或 2 個以上不給分）

1.	2.	3.

二、填充題：共 70 分

格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
得分	8	16	24	32	37	42	47	52	56	60	64	67	70

1.	2.	3.	4.	5.	6.(1)	6.(2)
7.	8.	9.	10.	11.	12.	

三、計算與證明題：共 15 分

1. (1) 6%	1. (2) 4%
2. 5%	

國立台南二中 104 學年度第 2 學期第一次期中考 高三自然組數學科答案卷

班級：三年級_____班 座號：_____ 姓名：_____

四、選擇題：每題 5 分，共 15 分（錯 1 個選項給 2 分，錯 2 個或 2 個以上不給分）

1.	2.	3.
245	3	14

五、填充題：共 70 分

格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
得分	8	16	24	32	37	42	47	52	56	60	64	67	70

1.	2.	3.	4.	5.	6.(1)	6.(2)
$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1, 3, 5	12	-8
7.	8.	9.	10.	11.	12.	
$-\frac{8}{3}$	$y = 3x$	-15	8	$\{y \in R \mid 0 < y \leq 16\}$	$x^3 + 3x^2 - 2x + 1$	

六、計算與證明題：共 15 分

<p>3. (1) 6%</p> <p>①當 $n = 1$ 時，左式 $= 2^1 = 2$，右式 $= 1$，因此 $2^1 \geq 1$，原式成立。</p> <p>②設 $n = k$ 時原式成立，即 $2^k \geq k$，則</p> <p>當 $n = k + 1$ 時，左式 $= 2^{k+1} = 2 \times 2^k \geq 2k$，右式 $= k + 1$，</p> <p>左式 - 右式 $\geq 2k - (k + 1) = k - 1 \geq 1 - 1 \geq 0$</p> <p>因此左式大於或等於右式，即 $2^{k+1} \geq k + 1$，</p> <p>所以原式在 $n = k + 1$ 時也成立。</p> <p>③由數學歸納法可知：對所有的正整數 n，不等式 $2^n \geq n$ 恆成立</p>	<p>1. (2) 4%</p> <p>因為 $0 < \frac{n}{3^n} \leq \frac{2^n}{3^n}$，</p> <p>又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$，</p> <p>所以由夾擠定理可知：$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = 0$</p>
<p>4. 5%</p> <p>因為 $f(x)$ 為多項式函數，所以 $f(x)$ 是連續函數。</p> <p>又因為 $f(49) = 98$，$f(51) = 102$，所以 100 介於 $f(49)$ 與 $f(51)$ 之間。</p> <p>由中間值定理得知：在 49 與 51 之間至少有一實數 c，使得 $f(c) = 100$</p>	