

國立台南第二高級中學 107 學年度 高二 適性班 數學 科 試題

說明：全卷總分為120%；請將答案填入答案卷中，否則不予計分。

一、填充題：每題 5%

說明：填充題該格完全答對才給該格分數，其餘情況均不給分。

若答案中含有分數之形式，請化為最簡分數，否則不予計分。

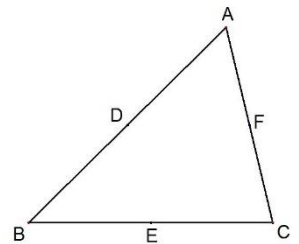
1. 若 $x^2 + \frac{2}{x^2} = 5$ ，則 $x^6 + \frac{8}{x^6} =$ _____

2. 一等比數列 $\{a_n\}$ 之各項均為正數，若 $a_1 \times a_2 \times a_3 = 50$ ， $a_2 \times a_3 \times a_4 = 100$ ，則 $a_4 \times a_5 \times a_6 =$ _____

3. 設多項式 $f(x)$ 除以 $(x+1)$ 的餘式與 $2f(x)$ 除以 $3(x+1)$ 的餘式相同，

且 $f(x)$ 除以 $(3x+1)$ 的餘式為 2，則 $f(x)$ 除以 $(x+1)(3x+1)$ 的餘式為 _____。

4. 如圖所示，由三角形 ABC 的三頂點及三邊中點 D 、 E 、 F 共六點中，
任選三個點為頂點可形成 _____ 個三角形。



5. 已知 $f(x) = x^3 + ax + b$ 為實係數三次多項式且 $f(-1+2i) = 0$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，

則方程式 $f(x) = 0$ 的實根為 _____。

6. 設 k 為實數，已知方程式 $x^2 - (k-2)x + (k^2 + 3k + 5) = 0$ 有兩實根 α 和 β ，

則 $\alpha^2 + \beta^2$ 的最大值為 _____。

7. 在剛結束的 *NBA* 總冠軍戰當中，統計勇士對 *Steven Curry* 出手投籃的狀況(不含罰球)，
有 48% 為兩分球，52% 為三分球。其中兩分球的命中率為 50%，三分球的命中率為 40%。

則在已知 *Steven Curry* 某一球出手投籃為命中的條件下，該球出手為三分球的機率為 _____。

8. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 2$, $a_{n-1} = \frac{a_n + 1}{a_n - 1}$, 則 $a_{100} =$ _____ 。

9. 已知正實數 a 會滿足不等式 $\left| x - \frac{5}{3} \right| \leq a$ 的整數解有 6 個, 則 a 的最小值為 _____ 。

10. 若 n 是一個三位正整數, 且 n 的個位數字大於十位數字, 十位數字大於百位數字, 則稱 n 為「三位遞增數」(例如 236、469、178 等等)。在某次數學課的活動中, 老師要求每位同學須從所有的「三位遞增數」中隨機選取一數,

則選取的「三位遞增數」的三個位數數字之積能被 10 整除之機率為 _____ 。

11. 設 $a = \log_3 0.6$, $b = \log_2 \sqrt[3]{24}$, $c = \log_4 5$, $d = \log_5 4$, 則 a 、 b 、 c 、 d 之大小順序為

_____ > _____ > _____

12. 某工廠欲製造一容積至少 32π 立方公尺的圓柱體無蓋容器, 已知半徑比高多 2 公尺, 則半徑至少為 _____ 公尺。

13. 有一便當店的價目表如下：

雞腿飯	燒肉飯	豬排飯	鯖魚飯	鱈魚飯
80 元	80 元	80 元	90 元	90 元

若小明帶了 500 元, 且想在便當店買便當並用光所有錢, 則共有 _____ 種不同的買法。

14. $(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)\cdots(1+10x)$ 的展開式中, x^2 項係數除以 1000 的餘數為 _____ 。

15. 當 $-2 \leq x \leq 3$ 時, $f(x) = 2^{2x+1} - 2^{x+3} + 9$ 的最大值為 M , 最小值 m , 則 $M + m =$ _____ 。

16. 不等式 $1 + 2\log_{\frac{1}{4}}(3-x) \geq \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$ 之解為 _____ 。

二、選擇題

說明：單選題每題 5%；多選題每題 6%，錯一選項得 4%，錯兩選項得 2%，其餘情形皆不給分

17. (單選題) 若數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{107}$ 中每一項皆為 0、1、-1、2、-2 其中一數，

則 $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{107}$ 有多少可能之值？ (A) 109 (B) 215 (C) 216 (D) 217 (E) 219

18. (單選題) 若正方形 $ABCD$ 各邊均平行座標軸，且對頂點 A 與 $C(3,8)$ 均在 $y = 2^x$ 上，

則 A 之 x 座標在下列哪一個範圍以內？

(A) $-\frac{11}{2} < x < -5$ (B) $-5 < x < -\frac{9}{2}$ (C) $-\frac{9}{2} < x < -4$ (D) $-4 < x < -\frac{7}{2}$ (E) $-\frac{7}{2} < x < -3$

19. (多重選擇題) 下列有關多項式函數圖形的平移與對稱敘述，選出正確的選項：

(A) 設 a, b, c 為實數且 $a \neq 0$ ，則將二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形適當的平移後

可與 $y = ax^2$ 之圖形完全重疊。

(B) 設 a, b, c, d 為實數且 $a \neq 0$ ，則將三次函數 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的圖形適當的平移後

可與 $y = ax^3$ 之圖形完全重疊。

(C) 若座標平面上， $y = x^2$ 的圖形為 Γ ，將 Γ 向右平移 2 單位，

再以 y 軸為對稱軸作對稱得一新圖形 Γ_1 ，則 Γ_1 的對稱軸為 $x = -2$

(D) 若座標平面上， $y = x^3$ 的圖形為 Γ ，將 Γ 向右平移 2 單位，得一新圖形 Γ_2 ，

則 Γ_2 的圖形對稱於點 $(2,0)$ 。

(E) 座標平面上 $y = x^3$ 的圖形與 $y = -x^3$ 的圖形對稱於 x 軸也對稱於 y 軸。

20. (多重選擇題) 設 $a > 1$ ， $f(x) = a^x$ ， $g(x) = \log_a x$ ，則下列哪些敘述正確？

- (A) 若 $f(x) = f(3)$ ，則 $x = 3$
- (B) 若 $(2, 3)$ 是 $y = f(x)$ 圖形上的一點，則 $(3, 2)$ 是 $y = g(x)$ 圖形上的一點。
- (C) 若 $y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 有交點，則 $(1, 1)$ 可能為此交點。
- (D) 若 k 為 $a^x = x$ 的根，則 $k - 1$ 是 $a \cdot a^x = \log_a(x + 1)$ 的根。
- (E) $y = f(x)$ 的圖形和 $y = g(x)$ 的圖形皆為凹口向上。

三、計算證明題

說明：配分如題後，每題皆需有完整的計算或證明過程，否則不予計分

1. 設 A 、 B 為樣本空間 S 中的兩非空事件且 A 、 B 為獨立事件，
試畫出文氏圖並證明 A' 與 B' 也為獨立事件。(6%)

2. 設資料 $X : x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ，算術平均數為 μ_x ，標準差為 σ_x ，試證明或說明：
 - (1) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu_x^2$ (6%)
 - (2) 將資料 X 經標準化後之新資料平均數為 0，標準差為 1 (各 3%)

試題結束

國立台南第二高級中學 107 學年度 高二 適性班 數學 科 答案卷

班級：一年____班 座號：_____ 姓名：_____

說明：1. 填充題該格完全答對才給該格分數，其餘情況均不給分。

若答案中含有分數之形式，請化為最簡分數，否則不予計分。

2. 全卷總分為 120%。

得分

一、填充題 (每題 5%)

1.	2.	3.	4.

5.	6.	7.	8.

9.	10.	11.	12.

13.	14.	15.	16.

二、選擇題

(單選題每題 5%；多重選擇題每題 6%，錯一選項得 4%，錯兩選項得 2%，其餘情形皆不給分)

17.(5%)	18. (5%)	19. (6%、4%、2%)	20. (6%、4%、2%)

三、計算證明題 (配分如題後，每題皆需有完整的計算或證明過程，否則不予計分)

1. (6%)

2. (每小題各 6%)

國立台南第二高級中學 107 學年度 高二 適性班 數學 科 答案卷

班級：一年____班 座號：_____ 姓名：_____

說明：1. 填充題該格完全答對才給該格分數，其餘情況均不給分。

若答案中含有分數之形式，請化為最簡分數，否則不予計分。

2. 全卷總分為 120%。

得分

一、填充題 (每題 5%)

1.	2.	3.	4.
95	400	$3x+3$	17

5.	6.	7.	8.
2	18	$\frac{13}{28}$	3

9.	10.	11.	12.
$\frac{8}{3}$	$\frac{11}{42}$	$b > c > d > a$	4

13.	14.	15.	16.
45	320	74	$\frac{7}{3} \leq x < 3$

二、選擇題

(單選題每題 5%；多重選擇題每題 6%，錯一選項得 4%，錯兩選項得 2%，其餘情形皆不給分)

17.(5%)	18. (5%)	19. (6%、4%、2%)	20. (6%、4%、2%)
<i>D</i>	<i>B</i>	<i>ACDE</i>	<i>ABD</i>

三、計算證明題 (配分如題後，每題皆需有完整的計算或證明過程，否則不予計分)

1. (6%)

$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= [1 - P(A)] - P(B)[1 - P(A)] \\ &= [1 - P(A)][1 - P(B)] = P(A')P(B') \\ \therefore P(A' \cap B') &= P(A')P(B') \end{aligned}$$

故由獨立的定義可知， A' 和 B' 也為獨立事件

(文氏圖 2%，寫出 $P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$ 得 2%，其餘證明過程 2%)

2. (每小題各 6%)

(1) (全對才給分)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\mu_x x_i + \mu_x^2) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n 2\mu_x x_i + \sum_{i=1}^n \mu_x^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu_x \sum_{i=1}^n x_i + n\mu_x^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\mu_x^2 + n\mu_x^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_x^2 \end{aligned}$$

$$\text{故 } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_x^2 \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu_x^2$$

(2)

$$\therefore \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{1}{\sigma_x} \times X - \frac{\mu_x}{\sigma_x},$$

由線性變換的性質可知

$$\text{標準化後的平均數為 } = \frac{1}{\sigma_x} \times \mu_x - \frac{\mu_x}{\sigma_x} = 0, \text{ 標準差 } \frac{1}{\sigma_x} \times \sigma_x = 1 \text{ (各 3\%)}$$